چکیده

برای رئوس u و v از گراف همبند G با مرتبه n، طول بلندترین $u-v$ مسیر در G به وسیله $D(u,v)$ نشان داده می شود. رنگ آمیزی هامیلتونی c از گراف G برچسبگذاری برای رئوس موسوم به رنگ است، به طوری که برای هر دو رأس متفاوت u و v از گراف G داشته باشیم:

$$D(u,v) + |c(u) - c(v)| \geq n - ۱.$$

مقدار $\mathrm{hc}(c)$ رنگ آمیزی هامیلتونی c از گراف G، بیشترین رنگ اختصاص داده شده به یک رأس از G توسط c است، و عدد رنگی هامیلتونی G که آن را با $\mathrm{hc}(G)$ نمایش می دهیم برابر است با $\min\{\mathrm{hc}(c)\}$، که مینیمم روی تمامی رنگ آمیزی های هامیلتونی G گرفته شده است.
سعی ما براین است که این نوع رنگ آمیزی را برای کلاس های مختلف از گراف ها بررسی کنیم. در این راه، از مقاله های:۱- رنگ آمیزی هامیلتونی گراف ها تألیف گری چاترند، لادیسلاو نبسکی و پینگ ژانگ

۲- رنگ آمیزی هامیلتونی برای برخی از گراف ها تألیف یوفا شن، وجین هی، ژائو لیو، دانگونگ هی و ژیاجینگ یانگ استفاده گردیده است.

کلمات کلیدی: رنگ آمیزی هامیلتونی، رنگ آمیزی رادیویی و رنگ آمیزی متقابل.

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

منظور از یک *گراف* G، دوتایی $G=(V,E)$ است که V یک مجموعه غیرتهی و E مجموعه ای از زیر مجموعه های دو عضوی V است. به مجموعه V، مجموعه *رئوس* و به مجموعه E، مجموعه *یال* ها میگوییم.هرگاه $e=\{x,y\}$ یال گراف G باشد، آنگاه می نویسیم $e=xy$ و میگوییم x با y مجاوراست. در این صورت y و x را رئوس پایانی e می نامیم. در ضمن می گوییم e از دو رأس y و x می گذرد. در $G=(V,E)$ تعداد رئوس را *مرتبه* G نامیده و معمولاً با n نمایش می دهیم و هم چنین تعداد یال ها را *اندازه* G نامیده و معمولاً با m نمایش می دهیم. گراف از مرتبه n و اندازه m را یک $(n,m)-$گراف می گوییم.

تعداد یال های گذرا از رأس $v\in V(G)$ را درجه رأس v می نامیم و آن را با $\deg(v)$ نمایش می دهیم.

ماکزیمم و مینیمم درجه رئوس گراف $G=(V,E)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Delta = \text{ماکزیمم درجه } G = \Delta(G) = \max\{\deg v | v\in V(G)\}$$

و

$$\delta = \text{مینیمم درجه } G = \delta(G) = \min\{\deg v | v\in V(G)\}.$$

به وضوح، برای هر رأس $v\in V(G)$

$$۰ \le \deg(v) \le n-۱ \quad \text{و} \quad ۰ \le m \le \binom{n}{۲}.$$

گراف $H=(V_H,E_H)$ را *زیرگراف* $G=(V_G,E_G)$ گوییم، هرگاه $V_H\subseteq V_G$، و $E_H\subseteq E_G$ باشد و می نویسیم $H\subseteq G$ است.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $v\in V(G)$ رأسی از گراف باشد، در این صورت منظور از $G-v$، زیر گرافی از G است که از حذف رأس v و یال هایی که انتهای آن ها v است به دست می آید.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $e\in E(G)$، در این صورت منظور از $G-e$ زیر گراف G است که از حذف یال e بدست می آید.

اگر u و v دو رأس غیر مجاور گراف $G=(V,E)$ باشند و $e=uv$ باشد، منظور از $G+e$، افزودن یال uv به G است.

اگر U زیرمجموعه ای ناتهی از $V(G)$ باشد، آنگاه زیرگراف القایی، القا شده توسط U، که با نماد $\langle U\rangle$ نشان داده می شود، زیر گرافی است که: الف) $V(\langle U\rangle) = U$ ب) $u, v \in U$ و $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $uv \in E(\langle U\rangle)$.

می گوییم گراف G *کامل* است، هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل را با نماد K_n نمایش می دهیم. واضح است که درجه هر رأس گراف کامل K_n برابر $n-۱$ و تعداد یال های گراف کامل برابر $\binom{n}{۲}$ است. گراف $r-$ *منتظم*، گرافی است که درجه هر رأس آن r است.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. *مکمل* G را که با $\bar{G}$ نمایش می دهیم، گرافی است با مجموعه رئوس V، به طوری که دو رأس در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

گراف G را $k-$ *بخشی* گوییم، هرگاه بتوان رئوس G را به k بخش $V_۱$، $V_۲$ ، . . . و V_k افراز کرد، به گونه ای که هر یال G یک انتها در V_i و یک انتها در V_j $(i \neq j)$ داشته باشد. گراف $k-$ بخشی G با بخش های $V_۱$، $V_۲$، . . . و V_k را کامل گوییم، هرگاه هر رأس V_i با هر رأس V_j ($۱ \leq i \neq j \leq k$) مجاور باشد. در صورتی که به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ داشته باشیم $|V_i| = n_i$، آنگاه آن را به صورت $K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_k}$ نمایش میدهیم.

گراف ۲ $-$ بخشی کامل با بخش های $V_۱$ و $V_۲$ که در آن $|V_۱| = m$ و $|V_۲| = n$ را به صورت $K_{m,n}$ نشان می دهیم.

فرض کنید $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ دو گراف رأس مجزا باشند در این صورت:

(الف) *اجتماع دو گراف* را با $G_۱ \cup G_۲$ نمایش داده، یال ها و رئوس آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases} E\left(G_۱ \cup G_۲\right) = E_۱ \cup E_۲ \\ V\left(G_۱ \cup G_۲\right) = V_۱ \cup V_۲ \end{cases}$$

(ب) *حاصل ضرب دکارتی گراف های* $G_۱$ و $G_۲$ با $G_۱ \times G_۲$ نمایش داده می شود و گرافی است که مجموعه رئوس آن $V_۱ \times V_۲$ است و دو رأس $\left(v_۱, v_۲\right)$ و $\left(v_۱', v_۲'\right)$ با هم مجاورند اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $v_۱ = v_۱'$ ، و $v_۲$ با $v_۲'$ مجاور است و یا

۲) $v_۲ = v_۲'$، و $v_۱$ با $v_۱'$ مجاور است.

گشت به طول m از رأسی مانند u به رأسی مانند v در گراف G، دنباله ای متشکل از $m+1$ رأس از گراف G مانند

$$u = x_0 , x_1 , \dots , x_m = v$$

است که به ازای $1 \leq i \leq m$، x_{i-1} و x_i دو رأس مجاور از G هستند.

مسیر،گشتی است که رأس تکراری ندارد. مسیری که دارای n رأس باشد را با P_n نشان می دهیم و چنین مسیری دارای $n-1$ یال است.

دور به طول n، $n \geq 3$ ، گشتی به طول n مانند

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n , x_1$$

است که x_1، x_2، . . . و x_n رأس های متمایزی هستند و دور به طول n را با C_n نشان می دهیم.

طول بزرگ ترین دور در گراف G، محیط G نامیده می شود و آن را با $\mathrm{cir}(G)$ نمایش می دهیم.

گراف G را *همبند* می نامند هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد و اگر گرافی همبند نباشد آن را *ناهمبند* گوییم.

زیر گراف F از گراف G یک *مولفه همبندی* است هرگاه از لحاظ همبندی ماکسیمال باشد، یعنی برای هر گراف همبند H، که داریم $F \subseteq H \subseteq G$، نتیجه بگیریم $F = H$. تعداد مولفه های همبندی گراف G را با $\kappa(G)$ نمایش می دهیم.

زیر گراف H از G را *فراگیر* گوییم هرگاه مرتبه H و G برابر باشد که به آن یک *فاکتور* از G گوییم.

یک *پل* از گراف G، یالی مانند $e \in E(G)$ است که $\kappa(G-e) > \kappa(G)$. پلی را که یکی از دو انتهای آن رأس انتهایی یا درجه یک باشد، *یال آویزان* می گوییم.

گراف G را *گرافی هامیلتونی* می گوییم هرگاه شامل دوری باشد که تمام رئوس G را داراست و دوری از گراف هامیلتونی را که شامل تمام رئوس است، *دور هامیلتونی* می نامیم.

به مسیری که شامل تمام رئوس گراف G باشد، *مسیر هامیلتونی* گوییم. گراف G را *همبند هامیلتونی* گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر هامیلتونی وجود داشته باشد.

دو رأس از G را *مستقل* گوییم، هرگاه با یکدیگر مجاور نباشند لذا مجموعه $S \subseteq V(G)$ را مستقل می نامیم، هر گاه تمامی اعضای آن دوبه دو مستقل باشند.

فاصله بین دو رأس $u, v \in V(G)$، برابر است با مینیمم طول $u-v$ مسیرهای واقع در G، که آن را با $d(u,v)$ نمایش می دهیم.

برای هر رأس $v \in V(G)$، *گریز از مرکز* را با $e(v)$ نمایش می دهیم که برابر است با:

$$e(v) = \max\{d(u,v) : u \in V(G)\}.$$

شعاع گراف G را با $\mathrm{rad}(G)$ نمایش می دهیم که برابر است با:

$$\mathrm{rad}(G) = \min\{e(v): v \in V(G)\}.$$

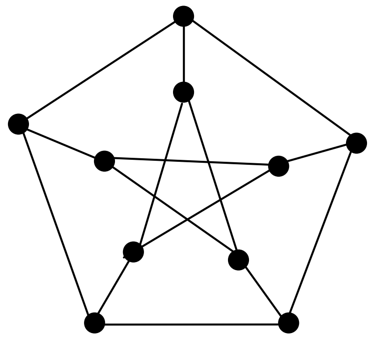
قطر گراف G را با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می دهیم که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{e(v): v \in V(G)\}.$$

دو رأس $u،v \in V(G)$ را رئوس متقابل[1] می گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$d(u, v) = \mathrm{diam}(G).$$

گراف زیر که از آن در این پایان نامه استفاده می گردد به *گراف پترسن* معروف است.



شکل۱.۱

گراف $G_۱$ با گراف $G_۲$ *یکریخت* است اگر نگاشتی یک به یک مانند φ از $V(G_۱)$ درون $V(G_۲)$ موجود باشد که حافظ مجاورت باشد، یعنی $uv \in V(G_۱)$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\varphi\, u\, \varphi\, v \in V(G_۲)$.

رنگ آمیزی سره گراف G عبارت است از نسبت دادن رنگ هایی به رئوس گراف- یک رنگ به هر رأس- بگونه ای که رأس های مجاور رنگ های متفاوت داشته باشند و رنگ های بکار رفته می توانند عناصری از هر مجموعه باشند ولی ما در رنگ آمیزی از اعداد طبیعی ۱، ۲، . . . و k برای نام گذاری رنگ ها استفاده می کنیم.

بنابراین، یک رنگ آمیزی (سره) را می توان به صورت تابع $c: V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ در نظرگرفت به طوری که هرگاه u و v در G مجاور باشند آنگاه $c(u) \neq c(v)$. اگر هر رنگ به کار رفته یکی از k رنگ داده شده باشد، آن گاه به این رنگ آمیزی یک $k-$ *رنگ آمیزی* می گوییم. در یک

$\mathbf{1}$ – antipodal

$k-$ رنگ آمیزی فرض می کنیم که رنگ های ۱، ۲، . . . و k به کار رفته اند. کمترین عدد صحیح k که می توانیم به وسیله آن یک $k-$ رنگ آمیزی از گراف G داشته باشیم *عدد رنگی* G نامیده می شود که آن را با $\chi(G)$ نمایش می دهیم.

برای گراف همبند G که دارای مرتبه n وقطر d است و یک عدد صحیح k که $۱ \leq k \leq d$، یک $k-$ *رنگ آمیزی رادیویی*[1] از گراف G را به این صورت تعریف می کنیم: نشان گذاری برای رئوس G مانند c است، طوری که برای هر دو رأس متفاوت u و v از G داشته باشیم

$$d(u,v) + |c(u) - c(v)| \geq ۱ + k.$$

مقدار $\mathrm{rc_k}\ (c)$ از یک $k-$ رنگ آمیزی رادیویی مانند c از گراف G، برابر ماکزیمم رنگ اختصاص داده شده به رئوس G توسط c است و $\mathrm{rc_k}(G)$ از گراف G برابر است با $\min\{\mathrm{rc_k}\ (c)\}$ که مینیمم روی تمامی $k-$ رنگ آمیزی رادیویی ها گرفته شده است و یک $k-$ رنگ آمیزی رادیویی مانند c از گراف G، $k-$ رنگ آمیزی رادیویی مینیمم است اگر $\mathrm{rc_k}(c) = \mathrm{rc_k}(G)$.

این مفهوم از مسأله نشان گذاری کانال ها، الهام گرفته شده است که در این نشان گذاری، کانال ها برای ایستگاههای رادیوی موج FM طبق فاصله بین دو ایستگاه (و برخی فاکتورهای دیگر) نشان گذاری می شوند.

از آنجا که $\mathrm{rc_۱}\ (G)$ همان $\chi(G)$ است، $k-$ رنگ آمیزی رادیویی تعمیمی از یک رنگآمیزی معمولی می باشد.

اگر قطر گراف G برابر d باشد، به جای عدد $d-$ رنگ آمیزی رادیویی [2] از *عدد رادیویی*[3] استفاده می گردد.

هم چنین به جای $d-$ رنگ آمیزی رادیویی از *برچسب رادیویی*[4] استفاده می گردد.

در این نوع رنگ آمیزی، نشان های مربوط به دو رأس مجاور باید حداقل d واحد اختلاف داشته باشند و رأس هایی که فاصله شان برابر ۲ است، باید حداقل $d - ۱$ واحد اختلاف داشته باشند و به همین ترتیب الی آخر، تا به رأس های متقابل می رسیم که تنها کافی است، متفاوت برچسب گذاری شده باشند.

یک $(d - ۱)-$ رنگ آمیزی رادیویی محدودیت کمتری دارد، و دو رأس به فاصله i ($۱ \leq i \leq d$) کافی است که $d - i$ واحد اختلاف داشته باشند و از آنجایی که، رأس های متقابل

---

1 − radio k − coloring
2 − radio d − chromatic number
3 − radio number
4 − radio labeling

میتوانند یک نشان اختیار کنند، $(d-۱)$ - رنگ آمیزی رادیویی را رنگ آمیزی رادیویی متقابل یا به طور ساده تر *رنگ آمیزی متقابل*[1] نیز می نامند و در این نوع رنگ آمیزی بجای $\mathrm{rc}_{d-۱}(G)$ از $\mathrm{ac}(G)$ استفاده می شود.

در مورد P_n با مرتبه $n \geq ۳$ (قطر $n-۱$) اگر رنگ آمیزی متقابل را بررسی کنیم، فقط رئوس انتهایی P_n میتوانند رنگ همسان اختیار کنند و مطمئنا این دو رأس با یک مسیر هامیلتونی به هم متصلند. اگر u و v دو رأس متفاوت از P_n باشند و $d(u,v)=i$، آنگاه

$$|c(u)-c(v)| \geq n-۱-i.$$

از آنجا که P_n درخت است، آنگاه i نه تنها طول کوتاهترین $u-v$ مسیر است، بلکه در حقیقت طول تنها $u-v$ مسیر است و هر $u-v$ مسیر در P_n از دو رأس متفاوت، با یک مسیر واحد به یکدیگر متصل می شوند در نتیجه، طول بزرگترین $u-v$ مسیر در P_n نیز برابر i است.

اگر برای گراف همبند G، $D(u,v)$ را طول طولانی ترین $u-v$ مسیر در G تعریف کنیم، شرط لازم برای یک رنگ آمیزی متقابل در P_n که

$$|c(u)-c(v)| \geq d(u,v)+d$$

است به این صورت در میآید:

$$D(u,v)+|c(u)-c(v)| \geq n-۱.$$

شرط فوق، نوعی رنگ آمیزی را برای گراف همبند G پیشنهاد می کند، که همان *رنگ آمیزی هامیلتونی* است. رنگ آمیزی هامیلتونی c از گراف G، نشانگذاری از رنگ ها (اعداد صحیح مثبت) برای رئوس G است، به قسمی که برای هر دو رأس متفاوت u و v از G داشته باشیم:

$$D(u,v)+|c(u)-c(v)| \geq n-۱.$$

در این نوع رنگ آمیزی دو رأس مختلف مانند u و v میتوانند رنگ یکسان اختیار کنند، اگر در G یک $u-v$ مسیر هامیلتونی وجود داشته باشد. مقدار $\mathrm{hc}(c)$ از رنگ آمیزی هامیلتونی c برای گراف G، ماکزیمم رنگ اختصاص داده شده به رأسی از G توسط c میباشد. عدد رنگی رنگ آمیزی هامیلتونی ($\mathrm{hc}(G)$) از گراف G برابر است با $\min\{\mathrm{hc}(c)\}$ که مینیمم روی تمامی رنگ آمیزی-های هامیلتونی c گرفته شده است.

رنگ آمیزی هامیلتونی c از گراف G، رنگ آمیزی هامیلتونی مینیمم است اگر

$$\mathrm{hc}(c)=\mathrm{hc}(G).$$

$\mathbf{1}-$ antipodal coloring

فصل دوم

تاریخچه وقضیه های مهم در رنگ آمیزی هامیلتونی گراف ها

۱.۲ تاریخچه ی رنگ آمیزی هامیلتونی گراف ها

به منظور آشنایی بیشتر با رنگ آمیزی هامیلتونی گراف ها، ابتدا از $k-$ رنگ آمیزی گراف ها آغاز میکنیم. در ایالات متحده یکی از وظایف سازمان برقراری ارتباطات [۱] یا FCC، تنظیم ایستگاههای رادیویی FM می باشد. هر ایستگاه، با فرکانسی که باید عبور دهد، شعاع مؤثر و آنتن دهی بالا مشخص می شود و این عوامل که مشخص کننده یک کلاس از ایستگاه ها می باشند، به تعدادی از فاکتورهای معین وابسته هستند. FCC مأموریت داشت ایستگاههای رادیویی FM جایگذاری شده(واقع) در یک محدوده را که با هم مجاورند، به گونه ای تنظیم کند که کانال های متفاوتی را مشخص کنند.

دو کانال مجاور در نظر گرفته می شوند، اگر ۲۰۰ KHz تفاوت داشته باشند. به عنوان مثال دو ایستگاه در کانالهای MHz ۱۰۵/ ۷ و MHz ۱۰۵/۹ مجاور یکدیگر هستند. فاصله بین دو ایستگاه رادیویی یکسان، حداقل باید ۷۲Km باشد. فاصله بین دو ایستگاه که بین ۴۰۰ تا ۶۰۰ کیلو هرتز با هم متفاوتند باید حداقل ۳۱ Km باشد. به منظور یافتن نشانگذاری بهینه در کانال ها جهت انتخاب مجموعهای از ایستگاههای انتقال رادیویی، طبق محدودیت های معین مانند فاصله بین ایستگاهها و یا فاکتورهای دیگر، به مسأله نشان گذاری کانال ها[۲] ارجاع داده می شود.

استفاده از گراف تئوری در نشانگذاری کانال ها و مسائل مشابه، حداقل به سال ۱۹۷۰ برمی گردد. درسال ۱۹۸۰ ، هال[۳] نشانگذاری کانال ها را به صورت محدودیت فاصله فرکانس ها، مدلسازی کرد و در مورد کاربرد آن ها و اهمیت آن در دنیای واقعی به مباحثه پرداخت و از آن زمان به بعد این مسأله الهامبخش برخی از رنگ آمیزی های گراف ها بوده است.

در سالهای بعد کازنز [۴]و رابرتز[۵] مطالعات مشابهی داشتند، که $T-$ رنگ آمیزی[۶] نام گرفت که در این رنگ آمیزی با داشتن مجموعهای از اعداد صحیح غیر منفی، به عنوان T اعداد را طوری به رئوس اختصاص میدهیم که تفاضل نشان های هر دو رأس مجاور مقداری از T نباشد. به عنوان مثال اگر

---

1 – Federal Communicate Commission
2 – Cannel Assignment Problem
3 – Hale
4 – cozzense
5 – roberts
6 – T – coloring

$T = \{۰\}$، آنگاه$T-$ رنگ آمیزی همان رنگ آمیزی معمولی میباشد. هم چنین نوعی دیگر از رنگ آمیزی از این مسأله بدست آمد که $L(۲,۱)-$ رنگ آمیزی[1] نام گرفت. در این رنگ آمیزی، باید رأس های مجاور اختلافی به میزان حداقل ۲ داشته باشند و رأس های با فاصله ۲، کافی است که متفاوت رنگ آمیزی شوند. این مسأله در نهایت منتهی شد به $k-$ رنگ آمیزی رادیویی، که در فصل ۱ در این مورد توضیح داده شد.

۲.۲ رنگ آمیزی هامیلتونی برخی ازگراف ها

یادآوری می کنیم که عدد رنگ آمیزی متقابل گراف G را با $\mathrm{ac}(G)$ و عدد رنگی هامیلتونی آن را با $\mathrm{hc}(G)$ نمایش می دهیم. از آنجا که P_n تنها گراف از مرتبه n می باشد که دارای قطر $n-۱$ است، لذا می توان گفت:

مشاهده۱.۲([۱]) اگر گراف G برابر مسیر P_n باشد، آنگاه $\mathrm{hc}(G) = \mathrm{ac}(G)$.

گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$ را نیم همبند هامیلتونی[2] گوییم اگر:

$$D(u,v) = \begin{cases} n-۲ & \text{اگر } u \text{ و } v \text{ مجاور باشند} \\ n-۱ & \text{اگر } u \text{ و } v \text{ مجاور نباشند} \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

۲.۲.۱ رنگ آمیزی گراف های نیم همبند هامیلتونی

اگر c، رنگ آمیزی هامیلتونی گراف نیم همبند هامیلتونی از مرتبه $n \geq ۳$ باشد، آنگاه برای هر جفت u و v از رئوس متفاوت G داریم

$$D(u,v) + |c(u)-c(v)| \geq n-۱.$$

اگر u و v مجاور باشند، طبق $(۱-۲)$ داریم $|c(u)-c(v)| \geq ۱$ و در صورتی که u و v غیر مجاور باشند باز هم طبق $(۱-۲)$ داریم $|c(u)-c(v)| \geq ۰$ که در واقع دو رأس نشان های مختلف اختیار می کنند، اگر مجاور باشند و می توانند نشان های یکسان اختیار کنند اگر غیر

---

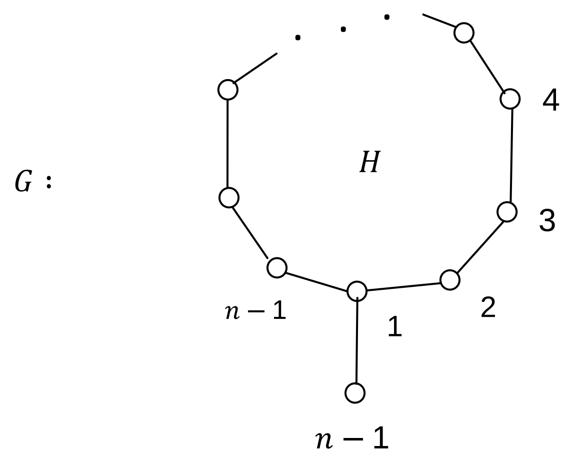
1 $-$ $L(2،1)$ $-$ coloring
2 $-$ semihamiltonian $-$ connected

مجاور باشند، که همان رنگ آمیزی معمولی است بنابرین اگر گراف G نیم همبند هامیلتونی باشد آنگاه

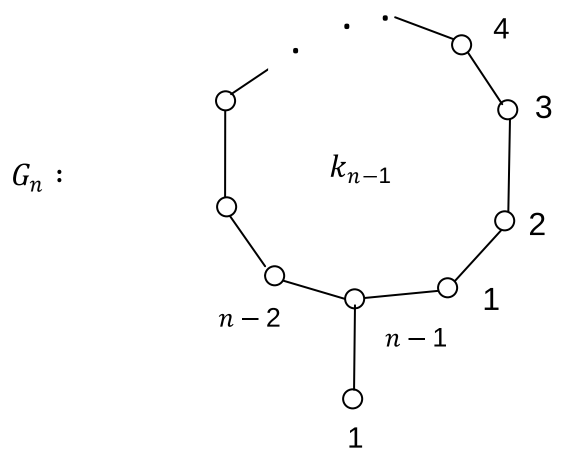
$$\mathrm{hc}(G) = \chi\,(G).$$

به عنوان مثال، می توان گراف $P_۳$ و گراف پترسن را در نظر گرفت که نیم همبند هامیلتونی می باشند، بنابرین عدد رنگی هامیلتونی آن ها با عدد رنگی معمولی آن ها یکی است که به ترتیب ۲ و۳ می باشد. به هر حال ممکن است گرافهای دیگری از این نوع باشند ولی تا به حال شناخته نشده اند.

مشاهده۲.۲ ([۱]) فرض کنید G گرافی همبند باشد، آنگاه $\mathrm{hc}(G) = ۱$ اگر و تنها اگر G همبند هامیلتونی باشد.



شکل۱.۲- رنگ آمیزی هامیلتونی c. از G



شکل۲.۲- رنگ آمیزی متقابل c' از G

۲.۲.۲ رنگ آمیزی هامیلتونی گراف هایی که با افزودن ۱ یا ۲ یال آویزان به گرافی هامیلتونی به دست آمده اند.

لم۱.۲([۱]) فرض کنید H گرافی هامیلتونی از مرتبه $n \geq ٤$ است. اگر G گرافی باشد که با افزودن یک یال آویزان به آن به دست آمده باشد، آنگاه $\mathrm{hc}(G) = n - ۱$.

اثبات. فرض کنید $C: v_۱, v_۲, \dots, v_{n-۱}, v_۱$ دور هامیلتونی از گراف H و $v_۱ v_n$ یال آویزان G باشد. c را رنگ آمیزی هامیلتونی برای G در نظر بگیرید. ازآنجا که برای تمام $u, v \in V(C)$ داریم:

$$D(u, v) \leq n - ۲،$$

لذا در رنگ آمیزی c، هیچ دو رأسی از دور C نشان یکسان ندارند و داریم $\mathrm{hc}(c) \geq n - ۱$، بنابراین

$$\mathrm{hc}(G) \geq n - ۱.$$

رنگ آمیزی $c_۰$ از G را به این صورت تعریف میکنیم که برای هر $۱ \leq i \leq n - ۱$ داشته باشیم:

$$c_۰(v_i) = i \text{ و } c_۰(v_n) = n - ۱.$$

(شکل ۱.۲ را ببینید) نشان میدهیم که $c_۰$ یک رنگ آمیزی هامیلتونی G است.

ابتدا دو رأس v_i و v_j را در نظر بگیرید به طوری که $۱ \leq i < j \leq \mathrm{n} - ۱$، آنگاه داریم $\left|c_۰(v_i) - c_۰(v_j)\right| = j - i$ در حالی که $D(v_i, v_j) \geq n - ۱ + i - j$، بنابراین

$$\left|c_۰(v_i) - c_۰(v_j)\right| + D(v_i, v_j) \geq n - ۱.$$

اکنون دو رأس v_i و v_n را در نظر بگیرید به طوری که $۱ \leq i \leq n - ۱$، بنابراین طبق تعریف داریم $|c_۰(v_i) - c_۰(v_n)| = n - ۱ - i$، از طرفی داریم $D(v_i, v_n) \geq i$ لذا

$$|c_۰(v_i) - c_۰(v_n)| + D(v_i, v_n) \geq n - ۱.$$

بنابراین، $c_۰$ یک رنگ آمیزی هامیلتونی G است و داریم $\mathrm{hc}(G) \leq \mathrm{hc}(c_۰) = \mathrm{n} - ۱$ که اثبات را کامل می کند. □

گزاره۱.۲ خانواده ای نامتناهی از گراف ها مانند G_n موجود است به طوری که داریم

$$\mathrm{ac}(G_n) = \mathrm{hc}(G_n) = \mathrm{n} - ۱.$$

فرض می کنیم $n \geq ٤$، در این حالت اگر G_n را گرافی در نظر بگیریم که با اضافه نمودن یک یال آویزان به $K_{n-۱}$ بدست آمده باشد، پس مرتبه G_n برابر n و قطر آن ۲ می باشد. فرض کنید $V(G_n) = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$، به قسمی که داشته باشیم $\deg \mathrm{v_n} = ۱$ و $v_{n-۱} v_n \in E(G_n)$